3. KOLOKVIJ – Zadaci za vježbu
3. svibanj 2007.

1. U kutiji se nalazi 30 crvenih i 70 bijelih kuglica. Kuglice se redom slučajno izvlače iz kutije i nakon svakog izvlačenja kuglica se vrati u kutiju. Kolika je vjerojatnost da

a) izvučemo bijelu kuglicu?
b) u prvom izvlačenju izvučemo crvenu a u drugom bijelu kuglicu?
c) u dva izvlačenja izvučemo bijelu i crvenu kuglicu?
d) u pet izvlačenja izvučemo točno tri crvene kuglice?
e) u pet izvlačenja izvučemo barem tri crvene kuglice?
f) u 50 izvlačenja izvučemo barem 10 crvenih kuglica?

Rješenje.
a) $P(b) = 30/100 = 0{,}3$

b) $P(1.c\,i\,2.b) = P(1.c)\cdot P(2.b) = 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}21$

c) $P(c\,i\,b) = P((1.c\,i\,2.b)\,ili\,(1.b\,i\,2.c)) = P(1.c\,i\,2.b) + P(1.b\,i\,2.c) = P(1.c)\cdot P(2.b) + P(1.b)\cdot P(2.c) =$
$0{,}3\cdot 0{,}7 + 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$

d) Binomna distribucija, $n = 5, p = 0{,}3$

$$\mathbf{P(3) = \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} = \binom{5}{3} 0{,}3^3 \cdot (1-0{,}3)^{5-3} = 10\cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}1323}$$

e) Binomna distribucija, $n = 5, p = 0{,}3$
$\mathbf{P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}837 = 0{,}163}$
Vrijednost 0,163 očitali smo iz tablice za binomnu distribuciju.

f) Binomna distribucija, $\mathbf{n = 50, p = 0{,}3}$
n je velik pa koristimo Poissonovu distribuciju: $\lambda = n\cdot p = 50\cdot 0{,}3 = 15$
$\mathbf{P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0{,}070 = 0{,}930}$
Vrijednost 0,070 očitali smo iz tablice za Poissonovu distribuciju.

2. U putničkoj agenciji iz iskustva znaju da je vjerojatnost otkazivanja 1 mjesta u autobusu 0,05, vjerojatnost otkazivanja 2 mjesta je 0,11, 3 mjesta 0,04, 4 mjesta 0,01 dok je vjerojatnost da niti jedno mjesto neće biti otkazano jednaka 0,79. Izračunajte očekivanje i varijancu za broj otkazanih mjesta u autobusu.

Rješenje. Distribucija vjerojatnosti:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
0	0.79	0.00	0.00
1	0.05	0.05	0.05
2	0.11	0.22	0.44
3	0.04	0.12	0.36
4	0.01	0.04	0.16
Σ		0.43	1.01

$\mathbf{E(X) = 0{,}78}$

$$\mathbf{Var(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i\right)^2 = 1{,}01 - 0{,}78^2 = 0{,}4016}$$

3. Stari igrač preferansa izračunao je da mu je očekivanje dobiti u jednoj igri 10 EUR uz standardnu devijaciju od 5 EUR. Izrazite očekivanje i standardnu devijaciju dobiti u kunama (1 EUR = 7,3 HRK).

Rješenje. X – dobit u EUR, Y – dobit u HRK.
$Y = 7{,}3 \cdot X$

$E(Y) = 7{,}3 \cdot E(X) = 7{,}3 \cdot 10 = 73$

$St.d.(Y) = 7{,}3 \cdot St.d.(X) = 7{,}3 \cdot 5 = 26{,}5$

Očekivanje je 73 kn uz standardnu devijaciju od 26,5 kn.

4. Šef recepcije iz iskustva zna da vjerojatnost da gost traži sobu s pogledom na more iznosi 0,7. Budući da je u hotelu slobodno još 20 soba s pogledom na more a očekuje se dolazak autobusa s 50 gostiju, izračunajte vjerojatnost da će šef recepcije moći udovoljiti zahtjevima svih gostiju za sobom s pogledom na more.

Rješenje. Varijabla X=broj gostiju koji će tražiti sobu s pogledom na more ima binomnu razdiobu s parametrima n=50 i p=0,7. Traži se vjerojatnost $P(X \le 20)$. Budući da u tablicama nemamo binomnu razdiobu za n=50, koristimo Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}7 = 35$. Ali niti ove distribucije nema u tablici (najveća vrijednost za parametar λ je 25). Postavimo zadatak drugačije. Varijabla Y=broj gostiju koji **neće** tražiti sobu s pogledom na more ima binomnu razdiobu s parametrima n=50 i p=0,3. Traži se vjerojatnost $P(Y \ge 30) = 1 - P(Y \le 29)$. Budući da u tablicama nemamo binomnu razdiobu za n=50, koristimo Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}3 = 15$.

$P(Y \ge 30) = 1 - P(Y \le 29) = 1 - 1{,}000 = 0.$

5. U hotelu znaju da se dnevno 0,5% gostiju bezrazložno žali na kvalitetu usluge. Kolika je vjerojatnost da se bezrazložno žali troje ili više gostiju ukoliko u hotelu trenutno boravi 200 gostiju?

Rješenje. Varijabla X=broj gostiju koji bezrazložno žale ima binomnu razdiobu sparametrima n=200 i p=0,005. Traži se vjerojatnost $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2)$. Budući da u tablicama nemamo binomnu razdiobu za n=200, koristimo Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}005 = 1$.

$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}920 = 0{,}080.$

6. Za slučajnu varijablu X distribuiranu prema jediničnoj normalnoj distribuciji izračunajte $P(X \le 1{,}5)$.

Rješenje. $P(X \le 1{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4332 = 0{,}9332.$

7. Za normalnu slučajnu varijablu X s očekivanjem 2 i varijancom 9 izračunajte $P(X \le 8)$.

Rješenje. Jer je varijanca 9 standardna devijacija je 3 pa je

$$P(X \le 8) = P\left(\frac{X-2}{3} \le \frac{8-2}{3}\right) = P\left(\frac{X-2}{3} \le 2\right) = 0{,}5 + 0{,}4772 = 0{,}9772.$$

Broj 0,4772 očitali smo iz tablice za normalnu razdiobu.

8. Da bi procijenili broj apartmana koji se iznajmljuju tijekom ljeta, inspektori su obišli 25 vikendica u Malom mistu. U njih 20 su našli goste koji su platili iznajmljivanje vikendice. Procijenite udio vikendica koje se iznajmljuju. Kolika je standardna pogreška? Odredite 95%-tni interval pouzdanosti za procjenu udjela.

Rješenje. Jer je varijanca 9 standardna devijacija je 3 pa je

$$\hat{p} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$$

$$st.pogr. = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot (1-0{,}08)}{25}} = 0{,}08$$

95%-tni interval pouzdanosti:

$$\left[\hat{p} - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right] = [0{,}8 - 1{,}96 \cdot 0{,}08, 0{,}8 + 1{,}96 \cdot 0{,}08] = [0{,}64, 0{,}96]$$

9. Da bi procijenili broj gostiju u apartmanima registriranim za iznajmljivanje, inspektori su i pobrojali broj gostiju u apartmanima. U 10 registriranih apartmana zabilježili su sljedeći broj gostiju:

3 2 5 7 4 6 5 3 4 6

Procijenite prosječan broj gostiju u apartmanu? Kolika je standardna pogreška? Odredite 95%-tni interval pouzdanosti za procjenu srednje vrijednosti.

Rješenje.

$$\sum X_i = 3+2+5+7+4+6+5+3+4+6 = 45$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i = \frac{45}{10} = 4{,}5$$

$$\sum X_i^2 = 3^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2 + 4^2 + 6^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 = 225$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)^2}{n-1} = \frac{225 - \frac{1}{10}4{,}5^2}{9} = 2{,}5$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$$

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}58}{\sqrt{10}} = 0{,}50$$

Jer je standardna devijacija nepoznata, iz tablice za t-razdiobu očitamo t za α=0,05 i 9 stupnjeva slobode: t_α=2,262. 95%-tni interval pouzdanosti je

$$\left[\overline{X} - t_\alpha(9)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_\alpha(9)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = [4{,}5 - 2{,}262\cdot 0{,}5, 4{,}5 + 2{,}262\cdot 0{,}5] = [3{,}37, 5{,}63].$$

10. U lokalnim novinama je pisalo da je tijekom ljeta iznajmljeno 70% vikendica. Da li je ta tvrdnja u skladu s rezultatima iz 8. zadatka? (Hipotezu testirajte uz razinu značajnosti od 5%.)

Rješenje. Testiramo hipotezu p=0,7. Računamo

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)/n}} = \frac{0{,}8 - 0{,}7}{\sqrt{0{,}8\cdot(1-0{,}8)/25}} = 1{,}09.$$

Jer se 1,09 nalazi između -1,96 i 1,96 hipotezu ne odbacujemo, tj. nalazi inspekcije su u skladu s napisom u novinama.

11. U Malom mistu je u prosjeku prijavljeno 3 gosta po apartmanu. Da li se u apartmanima prema podacima iz 9. zadatka nalazi više gostiju? (Hipotezu testirajte uz razinu značajnosti od 5%.)

Rješenje. Testiramo hipotezu μ=3. Računamo

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{4{,}5 - 3}{0{,}5} = 3.$$

Za α=0,05 i 9 stupnjeva slobode: t_α=2,262. Jer je $3 \geq 2{,}262$ hipotezu odbacujemo.